

Proc. 36th Annual Meeting of the Brazilian
Society for Metals, July, 1, p. 17, (1981).

O EFEITO DO TAMANHO DE GRAO SOBRE O LIMITE
DE ESCOAMENTO EM METAIS: UMA TEORIA

Marc Andre' Meyers*

e

E. Ashworth**

* Engenheiro, M.Sc., Ph.D., Membro da A.B.M., Professor Adjunto,
Departmento of Metallurgical and Materials Engineering, New Mexico
Institute of Mining and Technology. Socorro, New Mexico E.U.A.

** B.Sc., M.Sc., Professor Assistente, Department of Mining Engineering,
South Dakota School of Mines and Technology, Rapid City, South
Dakota, E.U.A.

ABSTRACT

A theory for the grain-size dependence of the macroyield stress in metals is proposed. According to it, plastic deformation at the macroyield stress is initiated when the shear stresses acting on the grain boundaries reach a critical level, τ_{em} . At this stress, dislocation generation and emission is initiated. This stress is the tensorial sum of two components: (a) a uniformly distributed shear stress due to the externally applied loads; and (b) a stress concentration produced by the elastic anisotropy of the adjacent grains. Of these two components, the stress concentration is grain-size dependent. By means of an appropriate analysis using the finite element method in a computer simulation, the expression below is obtained:

$$\sigma_y = \frac{2 \tau_{em}}{\sqrt{3} K_2 GD + 1}$$

σ_y is the macroyield stress; τ_{em} is the stress required for dislocation emission; D is the grain size; K_2 is a parameter expressing the grain-size sensitivity of the stress concentration; G is the shear modulus.

The predictions of the theory are successfully compared with experimental results obtained for nickel, modified AISI 1010 steel and Armco iron over a wide range of grain sizes. The large deviations from the Hall-Petch relationship are hitherto explained. The most important prediction of the model is that σ_y tends to $2 \tau_{em}$, when D tends to zero. Hence, the large increases in σ_y predicted by the Hall-Petch relationship at very small grain sizes are not justified.

RESUMO

Propõe-se uma teoria para o efeito de tamanho de grão sobre o limite de macroescoamento em metais. A hipótese básica da teoria é que o macroescoamento é iniciado quando a tensão cisalhante atuando nos contornos de grão alcança um valor critico τ_{em} . A esta tensão, as fontes de discordâncias dos contornos de grão são ativadas e é iniciada a emissão de discordâncias. Esta tensão é a soma tensorial de dois componentes: (a) uma tensão homogênea uniformemente distribuída pelos grãos e devida ao carregamento externo e (b) uma concentração de tensões gerada pela anisotropia elástica dos grãos adjacentes e pelo requisito de compatibilidade das deformações. Por meio de uma análise matemática apropriada usando o método de elementos finitos e simulação por computação obtém-se a expressão abaixo:

$$\tau_e = \frac{2\tau_{em}}{\sqrt{3}K_2 GD + 1}$$

σ_e é o limite de macroescoamento; τ_{em} é a tensão requerida para emissão de discordâncias; D é o tamanho de grão; K_2 é um parâmetro que exprime o efeito de tamanho de grão sobre a concentração de tensões; G é o módulo de cisalhamento.

As previsões da teoria são comparadas com resultados experimentais obtidos para níquel, aço AISI 1010 modificado, e ferro Armco obtidos em uma faixa de tamanhos de grão muito vasta. Os desvios apreciáveis da relação de Hall-Petch são explicados pela teoria, cujo resultado mais significativo é que σ_e tende para $2\tau_{em}$ quando D tende para zero. Portanto, os grandes aumentos na tensão de escoamento preditos pela relação de Hall-Petch para grãos muito pequenos não encontram confirmação na teoria proposta.

I. INTRODUÇÃO

A equação de Hall-Petch, que prediz a linearidade da relação entre σ_e (limite de escoamento) e $D^{-1/2}$ (tamanho de grão), tem sido aplicada com sucesso a uma variedade de metais. Pelo menos quatro teorias foram propostas, explicando, em termos micromecanísticos, a origem desta relação: as teorias de Hall¹-Petch², Cottrell³, Li⁴, e Conrad⁵. O assunto é tratado em detalhe por Hirth⁶ e Thompson⁷. Esta relação tem despertado grande interesse, já que prediz limites de escoamento extremamente elevados para tamanhos de grão submicronicos. No entanto, resultados recentes⁷⁻¹⁰, em que tamanhos de grão muito pequenos foram obtidos, mostram desvios consideraveis da relação de Hall-Petch.

Por outro lado, observações experimentais por microscopia eletronica de transmissão¹¹⁻¹³ tem demonstrado a grande importancia de contornos de grão como fontes de discordancias. Com efeito, as clássicas fontes de Frank-Read vem perdendo importancia nos ultimos anos, já que somente rarissimos casos foram observados experimentalmente. No caso de monocristais, há evidencia que o começo do escoamento plástico está associado com formação de discordancias na superficie¹⁴. Sethi e Gibala¹⁵ demonstraram eloquentemente a importancia de tensões interfaciais na alteração da tensão de escoamento. [Tendo em vista os desvios encontrados na relação de Hall-Petch e as novas descobertas sobre fontes de discordancias, desenvolveu-se uma nova teoria sobre o efeito de tamanho de grão na tensão de macroescoamento. Esta teoria está baseada na hipótese que a tensão de escoamento é alcançada quando a tensão cisalhante total agindo nos contornos de grão atinge um valor critico τ_{em} . Esta é a tensão requerida para gerar e emitir discordancias a partir dos contornos. A tensão total atuando em um contorno de grão é a soma de dois componentes: (a) a tensão resolvida (homogeneamente distribuída) devida ao carregamento externo; (b) um componente devido à anisotropia elástica dos grãos vizinhos e às condições impostas pela compatibilidade de deformação. A teoria é desen-

volvida na Secao II; comparação com resultados experimentais é apresentada na Seção III.

2. TEORIA

E necessário, inicialmente, calcular as constantes elásticas ao longo de diferentes orientações cristalográficas. Para tal, admite-se que cada grão é isotrópico, mas que tenha um módulo elástico característico. Uma análise rigorosa envolveria extenso tratamento tensorial e fugiria ao escopo deste trabalho. A determinação dos módulos elásticos ao longo das diferentes direções cristalográficas $[ijk]$ é feita usando-se a equação de Nye¹⁶:

$$\frac{1}{E_{ijk}} = S_{11} - 2(S_{11} - S_{12} - \frac{1}{2}S_{44})(\ell_i^2\ell_j^2 + \ell_j^2\ell_k^2 + \ell_i^2\ell_k^2) \quad (1)$$

E_{ijk} é o módulo elástico; S_{11} , S_{12} , e S_{44} são as submissões elásticas para sistemas com simetria cúbica; ℓ_i , ℓ_j , ℓ_k são os cossenos diretores da direção $[ijk]$. Usando-se dados experimentais de McGregor Tegart¹⁷, obtiveram-se as constantes elásticas para níquel e ferro; elas estão dadas na Tabela I. As direções $[100]$, $[110]$, e $[111]$ contém os extremos de resposta elástica. Pode-se ver que as diferenças são drásticas. Os módulos elásticos da direção $[111]$ são o dobro da direção $[100]$; este é o fator de maior importância na derivacão da teoria.

A análise das interações entre grãos vizinhos foi feita admitindo-se grãos cúbicos; em um metal ideal, os grãos são tetracadeaédricos mas a análise deste caso é excessivamente complexa. Assim, fizeram-se as seguintes hipóteses simplificadoras. Primeiro, consideraram-se somente dois tipos de grãos: $[100]$ e $[111]$. Segundo, admitiu-se que todos os grãos estão sob a mesma tensão. Tanto as análises de Taylor¹⁸ e Bishop e Hill¹⁹ para o encontro de agregados policristalinos admitem a mesma deformação em todos os grãos. No entanto, estas análises, apesar de realistas no regime plástico (volume constante; taxa de Poisson igual a 0,5) não predizem a dependência do limite de escoamento ao tamanho de

grão. Consequentemente, a hipótese de mesma tensão nos diferentes grãos, implicando em diferentes deformações (devido a variação nos modulos elásticos) é mais apropriada no regime elástico (taxa de Poisson igual a 0,3, volume variável). A analogia mostrada na Figura 1 mostra claramente a correção da hipótese. Considere-se uma caixa contendo esferas de aço e borracha. Comprimindo-se as esferas mediante um embolo, nota-se que as esferas de borracha (grãos [100]) sofrem maior deformação que as esferas de aço (grãos [111]).

A Figura 2 mostra grãos [100] e [111]. Caso fossem deformados isoladamente, ter-se-ia a configuração da Figura 2 (b). No entanto, eles possuem uma interface comum, e uma quantidade considerável de distorção é produzida ao longo da interface quando eles são submetidos a mesma tensão σ_{AP} ; isto está indicado na Figura 2 (c) pela rede imaginária de linhas inicialmente retas. Pode-se ver que o ângulo θ aumenta com a distância do plano central: $\theta_4 > \theta_2 > \theta_1 > \theta_0 = 0$. A tensão e deformação total na interface é a soma tensorial de dois componentes (soma tensorial é a soma dos componentes agindo em um cubo unitário referido ao mesmo sistema de eixos) para os dois casos: componente homogêneo da tensão e deformação aplicadas, e o componente localizado (distorção). Assim:

$$\tau_{Total} = \tau_{Interfacial} + \tau_{Homogeneo} \quad (2)$$

e

$$\gamma_{Total} = \gamma_{Interfacial} + \gamma_{Homogeneo} \quad (3)$$

Usar-se-ão doravante os símbolos T, I, e H. Para a obtenção da tensão e deformação totais, usar-se-á o princípio de superposição. As deformações interfaciais têm que ser calculadas em função do ângulo entre o eixo de carregamento e o plano da interface; isto está apresentado na Figura 3 para três orientações. Para uma orientação geral (Figura 3(c)) usa-se o princípio de superposição: o estado de deformações pode ser obtido considerando-se as tensões agindo isoladamente. Assim, as tensões são decompostas tal qual

indicado na Figura 3(c). A superposição das deformações resulta em:

$$\gamma_I = (\gamma_I)_1 + (\gamma_I)_2 + (\gamma_I)_3 + (\gamma_I)_4 \quad (4)$$

As deformações $(\gamma_I)_1$ a $(\gamma_I)_4$ são obtidas mediante o uso do metodo de elementos finitos. Assim, é possivel simular todas as orientações possiveis com somente quatro componentes.

O tratamento matematico detalhado e analise sistematica por elementos finitos serão apresentados em outra ocasião; os elementos essenciais são dados aqui. A deformação $(\gamma_I)_2$ corresponde à configuração da Figura 2. Pode-se ver que θ aumenta à medida que a distancia do plano central aumenta. Admite-se (e esta hipótese será justificada adiante) que:

$$(\gamma_I)_2 = \operatorname{tg} \theta = k_2 D \quad (5)$$

Porem, $(\gamma_I)_2$ é tambem função da tensão aplicada $\sigma_{AP} \cos \alpha$.

$$(\gamma_I)_2 = k_2 \sigma_{AP} \cos \alpha \quad (6)$$

Combinando-se as equações 5 e 6 e redefinindo o coeficiente de proporcionalidade:

$$(\gamma_I)_2 = K_2 D \sigma_{AP} \cos \alpha \quad (7)$$

Tem-se o mesmo para $(\gamma_I)_1$:

$$(\gamma_I)_1 = K_1 D \sigma_{AP} \operatorname{sen} \alpha \quad (8)$$

A analise por elementos finitos mostra que tem-se, aproximadamente, $K_2 = 4K_1$. Mostra tambem que não há contribuição interfacial de $(\gamma_I)_3$ e $(\gamma_I)_4$. Assim:

$$\gamma_I = K_2 D \sigma_{AP} (0,25 \operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha) \quad (9)$$

Pode-se obter γ_H determinando-se a tensão resolvida na direção dada por α :

$$\tau_H = \sigma_{AP} \cos \alpha \sin \alpha \quad (10)$$

Aplicando-se a equação 3, após converter τ_H em γ_H mediante o módulo de cisalhamento, obtém-se:

$$\gamma_T = K_2 D \sigma_{AP} (0,25 \sin \alpha + \cos \alpha) + \sigma_{AP} \cos \alpha \sin \alpha \quad (11)$$

Admite-se, em primeira aproximação, que a tensão (e deformação) cisalhante total é máxima para $\alpha = 45^\circ$. Assim:

$$\gamma_T = 0,884 K_2 D \sigma_{AP} + \frac{\sigma_{AP}}{2G} \quad (12)$$

on

$$\tau_T = (0,884 G K_2 D + \frac{1}{2}) \sigma_{AP} \quad (13)$$

Toma-se como G o módulo cisalhante do grão [111]. Tem-se

$$\sigma_{AP} \approx \frac{2 \tau_T}{\sqrt{3} G K_2 D + 1} \quad (14)$$

Admitindo-se que macroescoamento é iniciado quando τ_T alcança o valor crítico τ_{em} (tensão necessária para emitir discordâncias de fontes interfaciais), tem-se:

$$\sigma_e = \frac{2 \tau_{em}}{\sqrt{3} G K_2 D + 1} \quad (15)$$

σ_e é a tensão de macroescoamento. Esta equação representa o relação proposta pela teoria aqui descrita.

Simulação por computação usando o método de elementos finitos permite testar as hipóteses propostas pela teoria. A Figura 4 mostra a rede de

elementos utilizada. O metodo de elementos finitos divide o espaço continuo em elementos finitos; assim, constroe-se uma treliça composta de grande numero de elementos e obtem-se a solução simultanea das equações descrevendo os deslocamentos e forças nos elementos por tecnicas de inversão de matrizes. O metodo de elementos finitos foi desenvolvido há aproximadamente vinte anos e tem encontrado grande aplicação na solução de problemas estruturais. Oitenta elementos são usados na rede mostrada na Figura 4. Elementos 1 a 40 pertencem ao grão 1; elementos 4 a 80 pertencem ao grão 2. Note-se o eixo de simetria indicado na Figura 4. Assim, o numero efetivo de elementos é o dobro. O programa de computador utilizado é uma modificação do programa descrito por Desai e Abel²⁰. Pode operar tanto em regime de deformações planas quanto tensões planas. Usou-se o estado de deformações planas para simular o comportamento dos grãos.

A Figura 5 apresenta os deslocamentos observados para tamanho de grão de $10 \mu\text{m}$ e tensão aplicada de 10^2 MPa . Isto foi feito para três configurações (ver Figura 3(c)): $(\gamma_I)_2$, $(\gamma_I)_1$, e $(\gamma_I)_4$. A configuração $(\gamma_I)_3$ é identica a $(\gamma_I)_4$, se se admitir que as deformações são simetricas; em notação tensorial, $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$. A deformação cisalhante é obtida tomando-se a tangente do angulo θ . Nota-se que $(\gamma_I)_2 = 4(\gamma_I)$. Pode-se tambem ver que o angulo θ na interface não é diferente de θ em região no centro do grão para a configuração que dá $(\gamma_I)_4$ (Figura 5 (c)).

Foi tambem possivel demonstrar a correção da equação 6 por simulação, fazendo-se variar σ_{AP} para um tamanho de grão constante. No entanto a equação 5 não encontra confirmação direta. Obtem-se o mesmo valor de γ_I para diferentes tamanhos de grão. Este resultado é deveras significativo pois indica que as hipóteses não estão corretas. Assim, fizeram-se diversas tentativas por computador. A presença de degraus nos contornos não produziu os resultados esperados. No entanto, se se admite que o contorno de grão é um material com propriedades distintas dos grãos vizinhos, pode-se obter a relação

entre γ_I e D. Atomicamente, esta hipótese é bem fundamentada pois os átomos na vizinhança dos contornos estão afastados de suas posições de equilíbrio em uma rede cristalina tridimensional. Por sua vez, as propriedades elásticas são extremamente sensíveis às distâncias inter-átomicas. Assim, pequenos deslocamentos dos átomos na vizinhança produziriam alterações apreciáveis no limite elástico. A Figura 6 apresenta as distorções para uma região de contorno de grão com espessura de $0.2 \mu\text{m}$ e módulo elástico de 80 GPa . Pode-se ver claramente que $(\gamma_I)_2$ aumenta com o tamanho de grão. Quando a tamanho de grão é reduzido a $0.2 \mu\text{m}$, não há mais concentração de tensões e tem-se $\sigma_e = 2 \tau_{em}$.

3. COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Os resultados experimentais obtidos por Abrahamson⁸ e Thompson^{9,10} mostram eloquentemente que a curva σ_e versus D sofre um desvio progressivo da relação de Hall-Petch à medida que o tamanho de grão é reduzido abaixo de $1 \mu\text{m}$. Para comparar os resultados experimentais com a teoria, usa-se a equação 15. Nesta, há dois parâmetros desconhecidos: τ_{em} e K_2 . K_2 pode ser obtido mediante simulações por computador. No entanto, não se conhece suficientemente bem as propriedades da região de contorno, assim como sua espessura; assim, K_2 é calculado baseado na curva que melhor se ajusta aos resultados experimentais. A determinação de τ_{em} é bem simples: quando o tamanho de grão se aproxima de $0,2 \mu\text{m}$, tem-se $\sigma_e = 2 \tau_{em}$. Pode-se ver facilmente que este valor corresponde ao valor máximo do fator de Schmid: 0,5. Os resultados experimentais de Thompson^{9,10} e Abrahamson⁸ estão apresentados nas Figuras 7 e 8, respectivamente. O valor de $2 \tau_{em}$ está marcado nos gráficos; corresponde à reta horizontal à qual a curva é assintótica, para tamanhos de grão pequenos. As curvas teóricas são muito semelhantes aos resultados experimentais; isto demonstra a correlação satisfatória entre resultados experimentais e teoria.

4. CONCLUSÕES

- a. Propõe-se uma teoria que prediz o efeito do tamanho de grão sobre a tensão de macroescoamento em metais.
- b. A teoria se baseia na hipótese que a deformação plástica em escala apreciável é iniciada em policristais quando as fontes de discordâncias nos contornos de grão são ativadas, a uma tensão τ_{em} .
- c. Obtem-se a seguinte relação entre o tamanho de grão e a tensão de macroescoamento:

$$\sigma_e = \frac{2 \tau_{em}}{\sqrt{3} K_2 G D + 1}$$

- d. A aplicação de simulação por computação usando análise por elementos finitos indica que é necessário admitir-se uma região de contorno de grão com propriedades elásticas diferentes dos grãos.
- e. O teoria é comparada com sucesso com resultados experimentais obtidos por Abrahamson⁸ e Thompson^{9,10}.

AGRADECIMENTOS

Numerosas discussões com Prof. Dr. Murr foram extremamente valiosas. Dr. R.N. Orava e Prof. Dr. J.R.C. Guimarães cuidadosamente leram e corrigiram versões anteriores deste manuscrito. Esta pesquisa foi financiada pela National Science Foundation (DMR-79102) e pela Divisão de Pesquisas da South Dakota School of Mines and Technology.

BIBLIOGRAFIA

1. Hall, E.O., Proc. Roy. Soc. (London), Vol. B 64, pg. 474, 1951.
2. Petch, N.J., J. Iron Steel Inst., Vol. 174, pg. 25, 1953.
3. Li, J.C.M., Trans. AIME, Vol. 11, pg. 239, 1963.
4. Conrad, H., em "Ultra-Fine Grain Metals", Syracuse, U. Press, pg. 213, 1970.
5. Hirth, J.P., Met. Trans., Vol. 3, pg. 3047, 1972.
6. Thompson, A.W., em "Work Hardening in Tension and Fatigue", Ed. A.W. Thompson, AIME, pg. 89, 1977.
7. Anderson, E., King, D.W., e Spreadborough, J., Trans. AIME, Vol. 242 pg. 115, 1968.
8. Abrahamson II, E.P., em "Surfaces and Interfaces II", Syracuse U. Press, pg. 262, 1968.
9. Thompson, A.W., Acta Met., Vol. 23, pg. 1337, 1975.
10. Thompson, A.W., Acta Met., Vol. 25, pg. 83, 1977.
11. Tangri, K. e Malis, T., Surface Sci., Vol. 31, pg. 101, 1972.
12. Murr, L.E., Met. Trans., Vol. 6A, pg. 427, 1975.
13. Murr, L.E. e Hecker, S.S., Scripta Met., Vol. 13, pg. 167, 1979.
14. Nixon, W.E., Massey, M.H., e Mitchell, J.W., Acta Met., Vol. 27, pg. 943, 1979.
15. Sethi, V.K. e Gibala, R., Acta Met., Vol. 25, pg. 321, 1977.
16. Nye, J.F., Physical Properties of Crystals, Oxford U. Press, Oxford, Inglaterra, pg. 145, 1957.
17. McGregor Tegart, M.J., Elements of Mechanical Metallurgy, MacMillan, Nova York, pg. 89, 1966.
18. Taylor, G.I., J. Inst. Metals, Vol. 62, pg. 307, 1938.
19. Bishop, J.F. e Hill, R., Phil. Mag., Vol. 414, pg. 1298, 1951.
20. Desai, C.S., e Abel, J.F., Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand, Nova York, pg. 439, 1972.

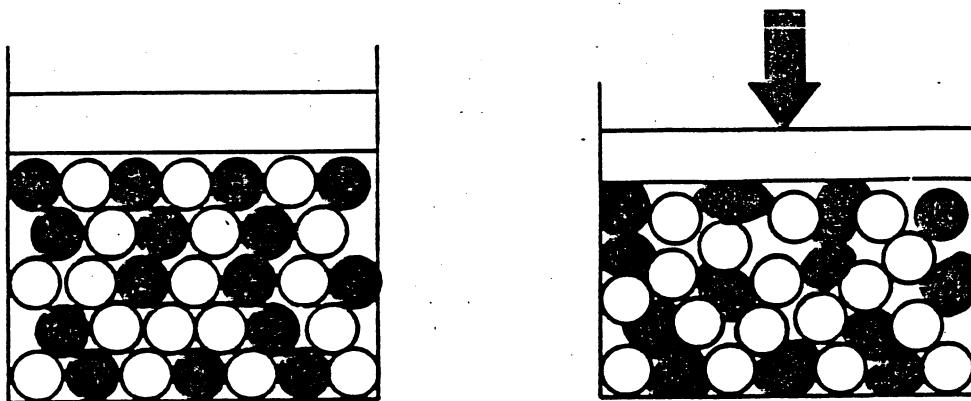
TABELA I

Constantes elásticas ao longo das direções [100], [110], e [111], para ferro e níquel

<u>Constantes Elásticas</u>	<u>Metal</u>	
	<u>Ferro</u>	<u>Níquel</u>
$E_{[100]}$ (GPa)	125, 0	136, 9
$E_{[100]}$ (GPa)	200, 0	232, 5
$E_{[111]}$ (GPa)	272, 7	303, 0

LEGENDA DAS FIGURAS

- Figura 1. Modelo de esferas de aço e borracha usado para ilustrar comportamento elástico de agregado policristalino. (a) antes da deformação; (b) "grãos" de borracha sofrendo maior deformação que "grãos" de aço.
- Figura 2. Deformação de dois grãos cubicos sob a mesma tensão aplicada. (a) Grãos [100] e [111] antes da deformação; (b) deformação, se grãos estiverem separados; restrições de compatibilidade produzindo distorções $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$ na interface.
- Figura 3. Tres orientações do eixo de tensão em relação à interface dos grãos
 (a) eixo de tensão perpendicular ao plano da interface ($\alpha = 90^\circ$)
 (b) eixo de tensão paralelo ao plano da interface. ($\alpha = 0^\circ$)
 (c) eixo de tensão inclinado em relação ao plano da interface e decomposição do estado de tensões em quatro estados de tensões mediante aplicação do princípio de superposição.
- Figura 4. Rede de elementos finitos usada na simulação por computação. Observe-se o eixo de simetria.
- Figura 5. Campos de deslocamento para distintas configurações. $D = 10 \mu\text{m}$; $\sigma_{AP} = 10^2 \text{ MPa}$. (a) $(\gamma_I)_2$; (b) $(\gamma_I)_1$; (c) $(\gamma_I)_4$
- Figura 6. Campos de deslocamento para configuração $(\gamma_I)_2$ com região de contorno de grão com $2 \mu\text{m}$ de espessura ($\sigma_{AP} = 10^2 \text{ MPa}$).
 (a) $D = 1 \mu\text{m}$; (b) $D = 10 \mu\text{m}$.
- Figura 7. Comparação da teoria com resultados obtidos por Thompson^{9,10} para níquel.
- Figura 8. Comparação da teoria com resultados obtidos por Abrahamson⁸ para aço AISI 1010 modificado.



● BORRACHA
○ AÇO

Figura 1. Modelo de esferas de aço e borracha usado para ilustrar comportamento elástico de agregado policristalino. (a) antes da deformação; (b) "grãos" de borracha sofrendo maior deformação que "grãos" de aço.

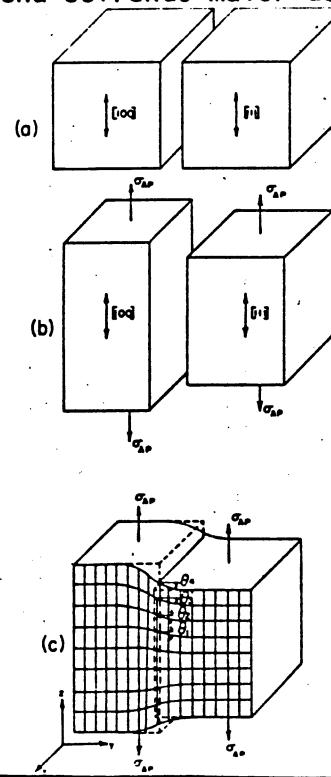


Figura 2. Deformação de dois grãos cubicos sob a mesma tensão aplicada. (a) Grãos [100] e [111] antes da deformação; (b) deformação, se grãos estiverem separados; restrições de compatibilidade produzindo distorções $\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < \theta_4$ na interface.

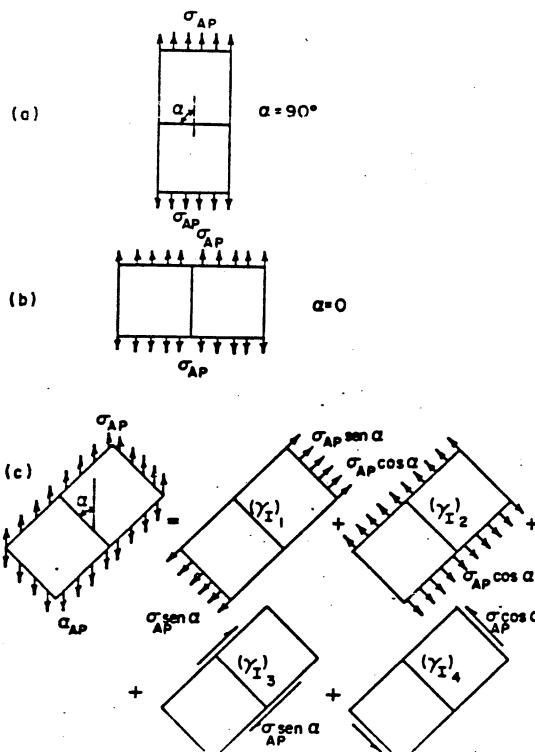


Figura 3. Três orientações do eixo de tensão em relação a interface dos grãos.
 (a) eixo de tensão perpendicular ao plano da interface ($\alpha = 90^\circ$)
 (b) eixo de tensão paralelo ao plano da interface. ($\alpha = 0^\circ$)
 (c) eixo de tensão inclinado em relação ao plano da interface e decomposição do estado de tensões em quatro estados de tensões mediante aplicação do princípio de superposição.

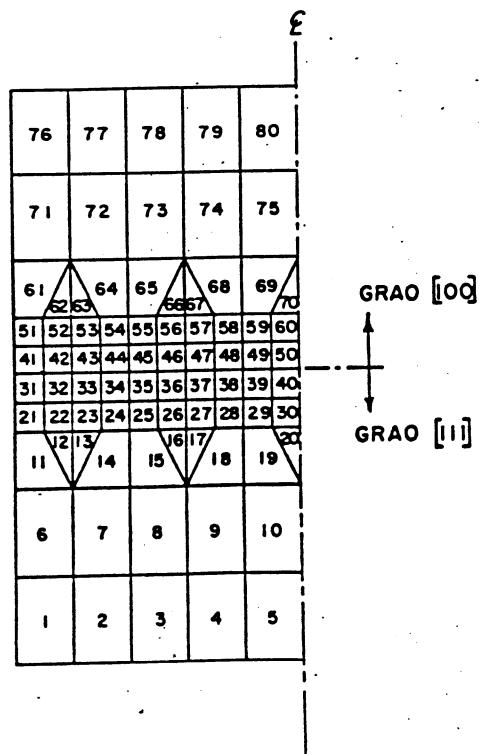
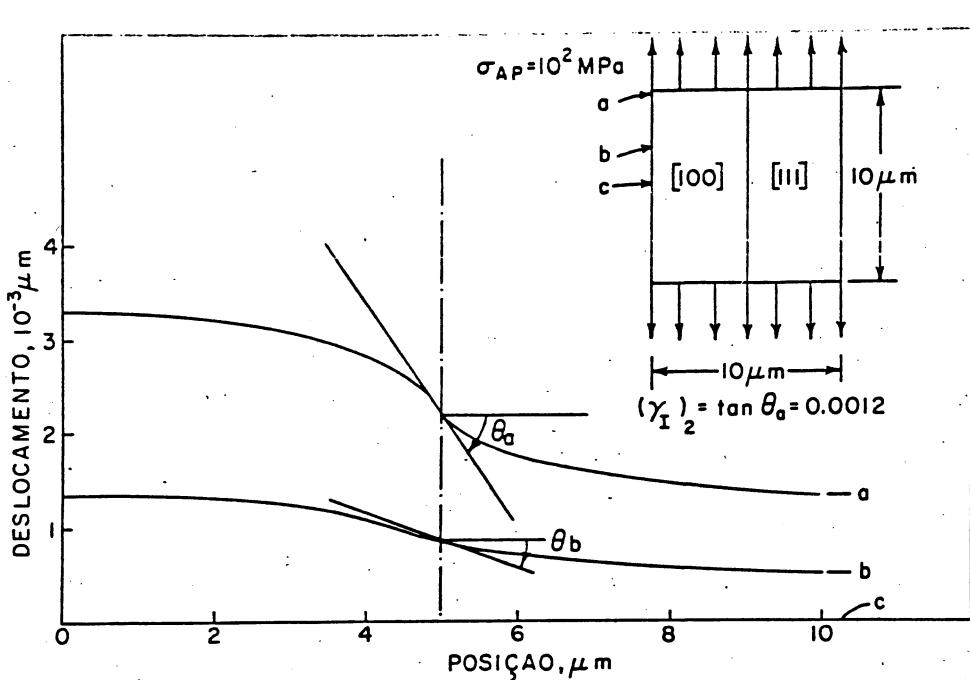
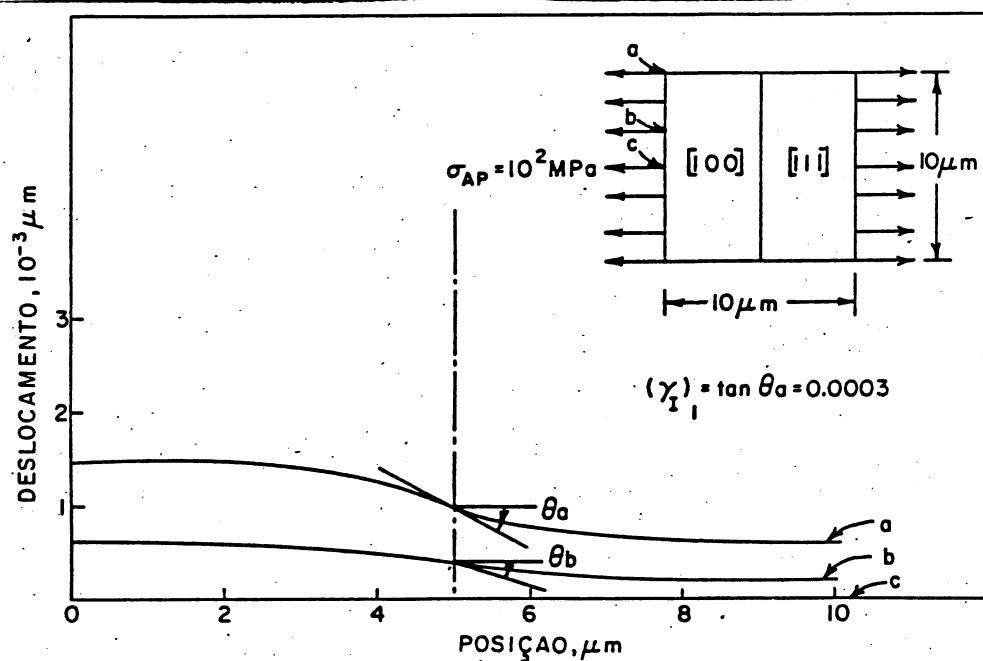


Figura 4. Rede de elementos finitos usada na simulação por computação.
 Observe-se o eixo de simetria.

(a)



(b)



(c)

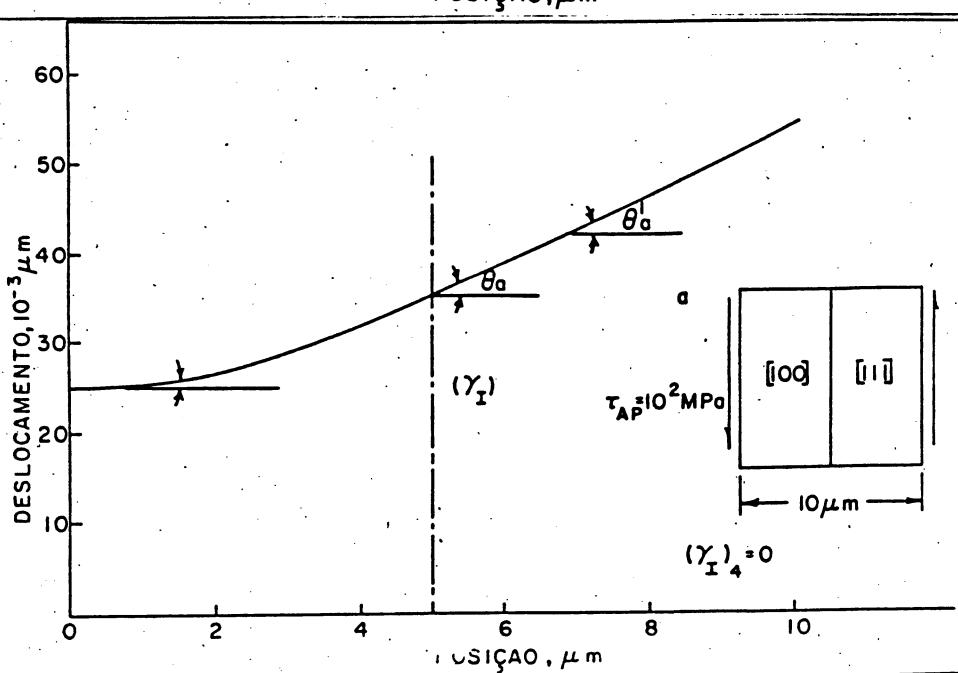


Fig. 5. Campos de deslocamento para distintas configurações. $D = 10 \mu\text{m}$; $\sigma_{AP} = 10^2 \text{ MPa}$ (a) (γ_1) · (b) (γ_1) · (c) (γ_1)

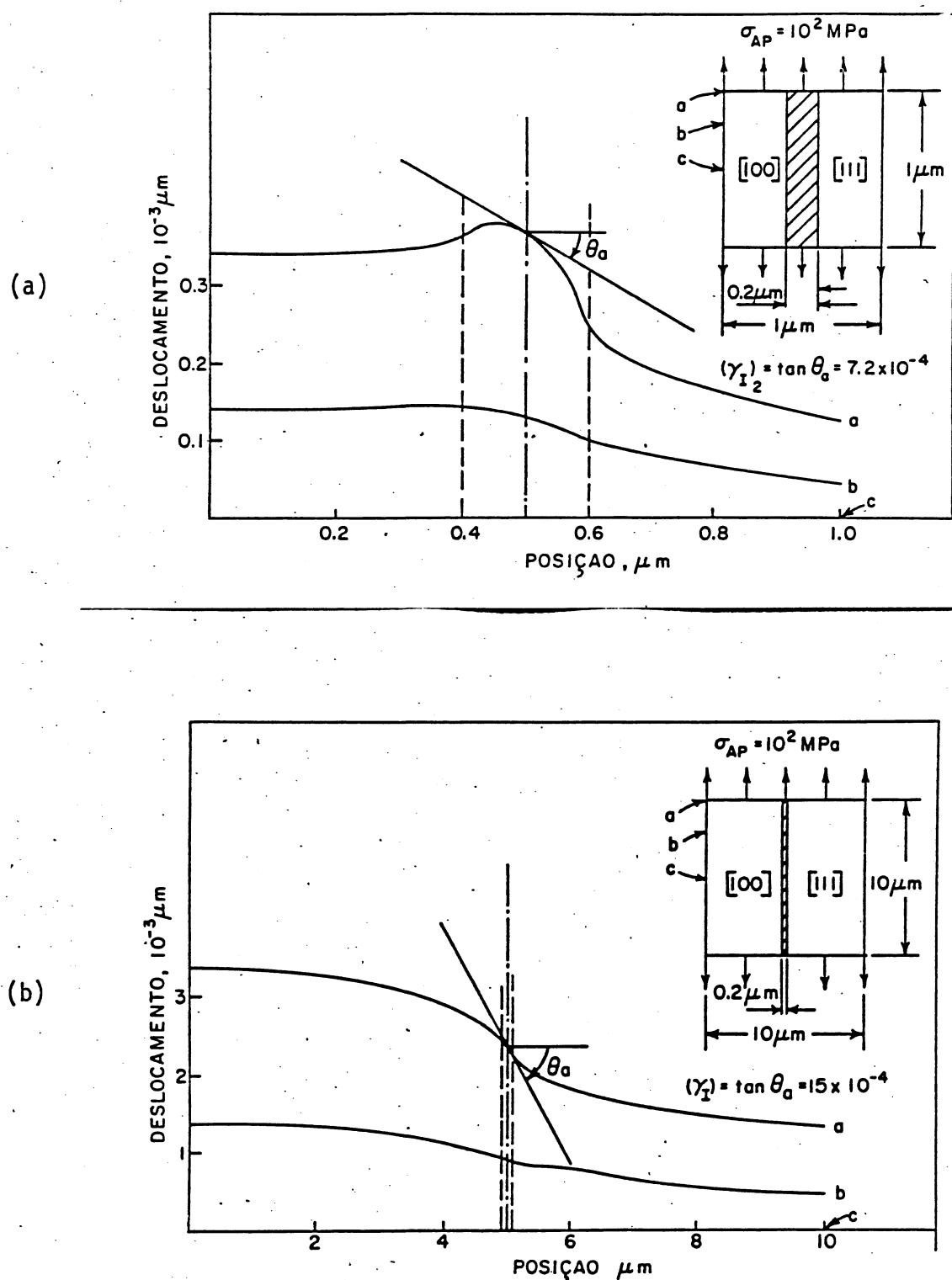


Figura 6. Campos de deslocamento para configuração $(Y_1)_2$ com região de contorno de grão com $2 \mu\text{m}$ de espessura ($\sigma_{AP} = 10^2 \text{ MPa}$).
(a) $D = 1 \mu\text{m}$; (b) $D = 10 \mu\text{m}$.

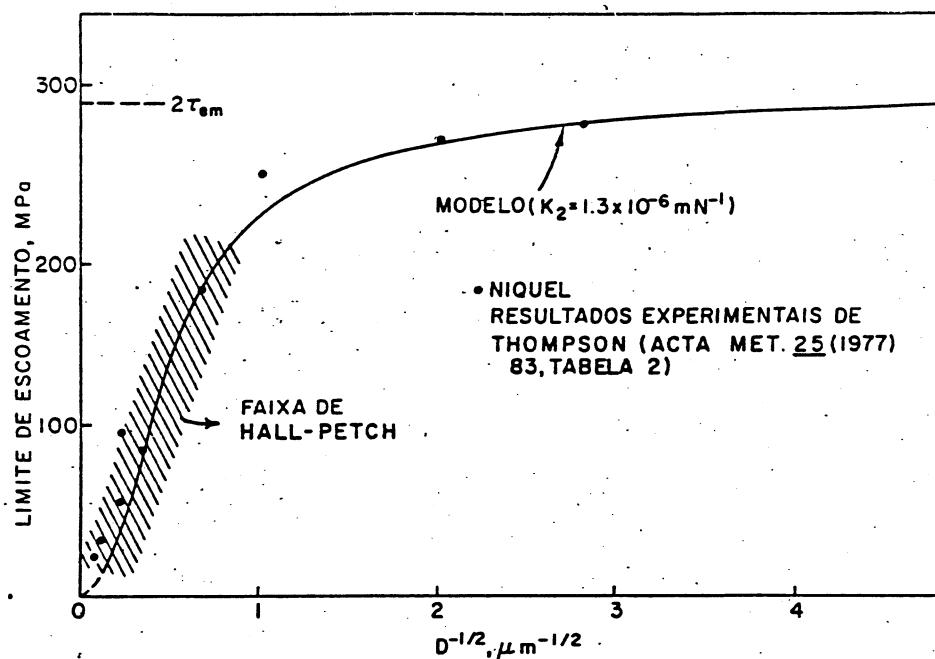


Fig. 7. Comparação da teoria com resultados obtidos por Thompson^{9,10} para níquel.

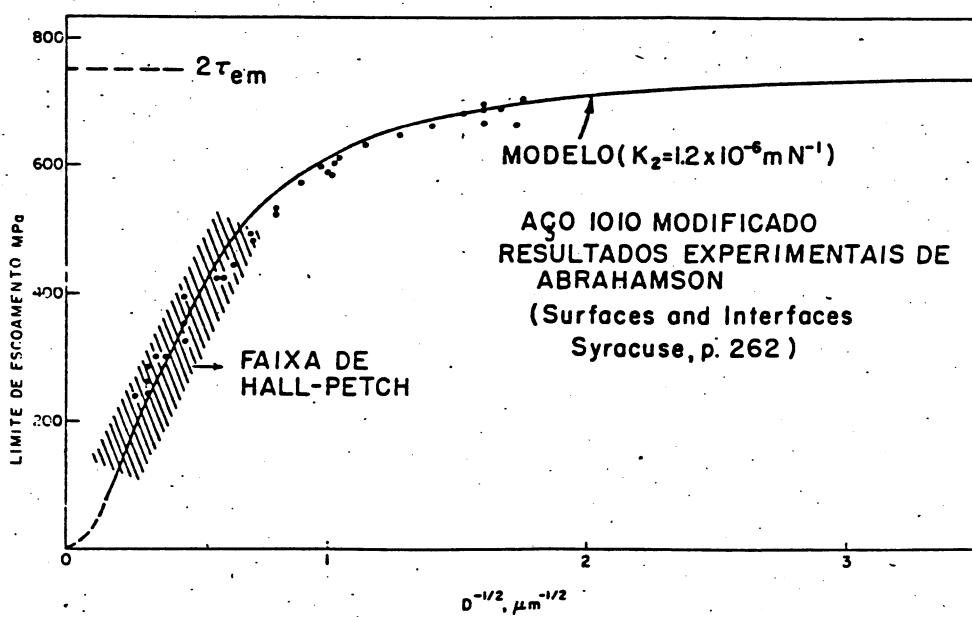


Fig. 8. Comparação da teoria com resultados obtidos por Abrahamson⁸ para aço AISI 1010 modificado.